

Аддитивная комбинаторика. Завершение

9 июля

Опр. Группа вычетов по простому модулю p обозначается символом \mathbb{F}_p .

Теорема Коши-Дэвенпорта. Пусть A и B — непустые подмножества \mathbb{F}_p . Тогда

$$|A + B| \geq \min(p, |A| + |B| - 1).$$

1. (а) Пусть утверждение теоремы верно для множеств $A' = A \cup B$, $B' = A \cap B$. Докажите, что оно верно и для множеств A , B .

(б) Докажите, что если $|A| \geq 2$, $|B| \leq p - 1$, то существует такое $c \in \mathbb{F}_p$, что

$$A + \{c\} \neq (A + \{c\}) \cap B \neq \emptyset.$$

(в) Докажите теорему индукцией по $\min(|A|, |B|)$.

2. Сформулируйте и докажите аналог теоремы Коши-Дэвенпорта для множеств A_1, A_2, \dots, A_k .

3. Пусть p — простое число, k и d — натуральные. Докажите, что:

(а) Существуют такие натуральные a и b , что $a^2 + b^2 - k$ делится на p .

(б) Существуют такие натуральные a_1, a_2, \dots, a_d , что $a_1^d + a_2^d + \dots + a_d^d - k$ делится на p .

4. Для данного составного n приведите пример множеств A и B , для которых не выполнена теорема Коши-Дэвенпорта.

5. Даны n натуральных чисел, взаимно простых с n . Докажите, что для любого a можно выбрать несколько из них так, чтобы их сумма была сравнима с a по модулю n .

6. Дано множество X из 10000 целых чисел, ни одно из которых не делится на 47. Докажите, что существует такое $Y \subset X$, состоящее из 2007 элементов, что для любых $a, b, c, d, e \in Y$ значение $a - b + c - d + e$ не делится на 47.

Теорема Эрдёша-Гинзбурга-Зива. Среди любых $2n - 1$ целого числа можно выбрать n , сумма которых делится на n .

7. (а) Приведите пример $2n - 2$ целых чисел, из которых нельзя выбрать n , сумма которых делится на n .

(б) Докажите утверждение теоремы для простого n .

(в) Докажите, что если утверждение теоремы верно для $n = a$ и $n = b$, то оно верно и для $n = ab$.

8. Пусть $m \geq k \geq 2$, причём m делится на k . Докажите, что среди любых $m + k - 1$ целого числа можно выбрать m , сумма которых делится на k .